衡阳市第七中学2024年高一第一次月考数学试卷

一、单选题（每小题5分）

1．已知平面α//平面β，直线$m\subset\alpha$，直线$n\subset\beta$，则直线m，n的位置关系为（　）

A．平行或相交　B．相交或异面　C．平行或异面　D．平行、相交或异面

2．在下列各组向量中，可以作为基底的是（　）

A．$\overrightarrow{e_1}=(-1,3)$，$\overrightarrow{e_2}=(4,9)$　B．$\overrightarrow{e_1}=(0,0)$，$\overrightarrow{e_2}=(1,-2)$

C．$\overrightarrow{e_1}=(-2,3)$，$\overrightarrow{e_2}=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$　D．$\overrightarrow{e_1}=(2,9)$，$\overrightarrow{e_2}=(4,18)$

3．在△ABC中，AD为BC边上的中线，E为AD的中点，则$\overrightarrow{EB}=$（　）

A．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　B．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

C．$\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　D．$\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

4．已知$\vec{a}$，$\vec{b}$为单位向量，若$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$，则$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{2\pi}{3}$　D．$\frac{5\pi}{6}$

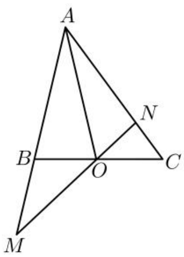
5．一个水平放置的平面图形的直观图是一个底角为45°，腰和上底长均为1的等腰梯形，则该平面图形的面积等于（　）.

A．$1+\sqrt{2}$　B．$2+\sqrt{2}$　C．$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　D．$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

6．已知$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，且$a^2+b^2-c^2=-ab$，若$c=3$，则$\triangle ABC$的外接圆的半径为（　）

A．$\sqrt{3}$　B．$2\sqrt{3}$　C．3　D．6

7．如图，已知$\triangle ABC$与$\triangle AMN$有一个公共顶点A，且MN与BC的交点O平分BC，若$\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，则$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为（　）



A．4　B．$\frac{3+\sqrt{2}}{2}$　C．$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$　D．6

8．已知直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的6个顶点都在球O的表面上，若$AB=AC=1$，$AA_1=2\sqrt{3}$，$\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，则球$O$的体积为（　）

A．$\frac{32\pi}{3}$　B．3π　C．$\frac{4\pi}{3}$　D．8π

二、多选题（每小题 6 分，全部选对得 6 分，有选错的得 0 分）

9．已知复数 $z=\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$（i 是虚数单位），则下列结论正确的是（　）

A．复数 z 的虚部等于 $-2\mathrm{i}$　　B．$\bar{z}$ 对应复平面内的点在第三象限

C．$z+\bar{z}=-2$　　D．若 a 是实数，$z+a$ 是纯虚数，则 $a=1$

10．已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-3,1)$，则下列说法正确的是（　）

A．$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)//\vec{a}$　　B．向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量为 $-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

C．$\vec{a}$ 与 $\vec{a}-\vec{b}$ 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D．若 $\vec{c}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$，则 $\vec{a}\perp\vec{c}$

11．在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边为 a,b,c，有如下判断，其中正确的判断是（　）

A．若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形

B．若 $a=b\sin C+c\cos B$，则 $\angle C=\dfrac{\pi}{4}$

C．若 $a=12,b=10,B=60°$，则符合条件的 $\triangle ABC$ 有两个

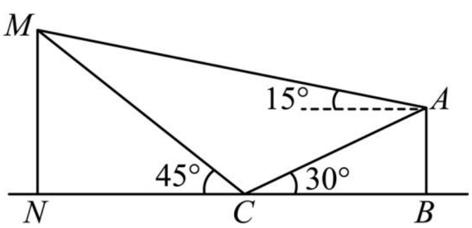
D．在锐角三角形 ABC 中，不等式 $b^2+c^2-a^2>0$ 恒成立

三、填空题（每小题 5 分）

12．设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $b=2\sqrt{3}$，$c=8$，$A=30°$，则 $\triangle ABC$ 的面积为________.

13．已知向量 $\vec{a}=(m,3)$，$\vec{b}=(1,m)$，若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相反，则 $\left|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}\right|=$________.

14．瑞云塔位于福清市融城东南龙首桥头，如图，某同学为测量瑞云塔的高度 MN，在瑞云塔的正东方向找到一座建筑物 AB，高为 $17.3\mathrm{m}$，在地面上点 C 处（B，C，N 三点共线）测得建筑物顶部 A，瑞云塔顶部 M 的仰角分别为 30°和 45°，在 A 处测得瑞云塔顶部 M 的仰角为 15°，瑞云塔的高度为______.



四、解答题（本题共 5 小题，15 题 13 分，16，17 题各 15 分，18, 19 题各 17 分，共 77 分）

15．已知 $\vec{a}=(-1,0)$，$\vec{b}=(2,1)$.

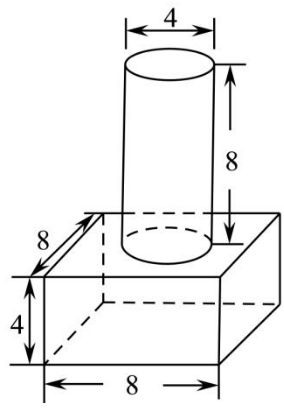
(1)若 $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{a}+m\vec{b}$ 且 A、B、C 三点共线，求 m 的值.

(2)当实数 k 为何值时，$k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}+2\vec{b}$ 垂直？

16．如图是由一个长方体和一个圆柱组成的组合体.

（1）求该组合体的表面积；

（2）求该组合体的体积.



17. 已知 A,B,C 为 $\triangle ABC$ 的三内角，且其对边分别为 a,b,c. 若 $\vec{m}=(a,\cos A),\vec{n}=(\sin B,-\sqrt{3}b)$ 且 $\vec{m}\perp\vec{n}$.

(1)求角 A 的大小；

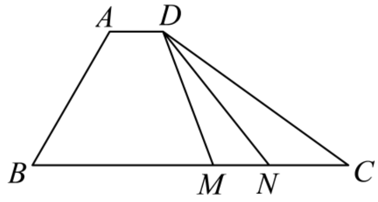
(2)若 $a=2\sqrt{3}$，求 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围.

18．如图， 在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60°$， $AB=3$， $BC=6$，

(1)求 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值；

(2)若 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}$，求实数λ的值；

(3)在（2）的条件下，若 M，N 是线段 BC 上的动点， 且 $\left|\overrightarrow{MN}\right|=1$，求 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值.



19．“费马点”是由十七世纪法国数学家费马提出.该问题是：“在一个三角形内求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小.”意大利数学家托里拆利给出了解答，当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 $120°$ 时，使得 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$ 的点 O 即为费马点；当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 $120°$ 时，最大内角的顶点为费马点.试用以上知识解决下面问题：

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A， B， C 所对的边分别为 a， b， c，且 $\cos 2B+\cos 2C-\cos 2A=1$

(1)求 A；

(2)若 $bc=2$，设点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$.